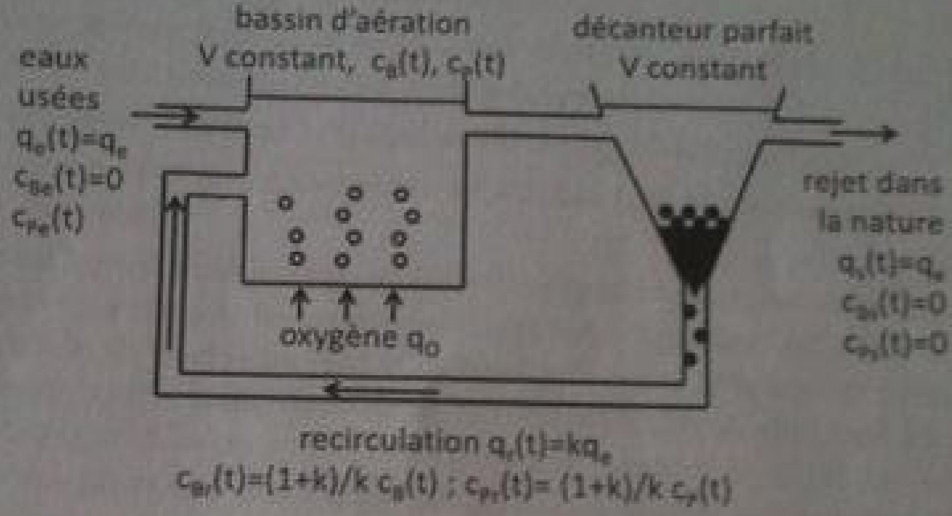
- Les calculatrices et les documents sont autorisés.
- Le sujet est délibérément long et sera noté en conséquence.
- Barème indicatif : Ex.1 = 10 pt ; Ex.2 = 6 pt ; Ex.3 = 12pt.
- Le soin, la clarté, la rigueur et la concision sont des qualités appréciées et évaluées.

1. **Étude d'un modèle simplifié de station d'épuration**

On considère une station d'épuration à boues activées, représentée ci-dessous, composée d'un bassin d'aération et d'un décanteur. Dans le bassin, les eaux usées sont mises en contact avec des bactéries qui consomment les polluants. Cette réaction est favorisée par l'injection d'oxygène. Le décanteur permet de séparer, par gravitation, l'eau claire et les composés solides : bactéries et polluants. L'eau claire est rejetée dans le milieu naturel. Les composés solides sont recyclés en tête de station afin de continuer de détruire les polluants et de régénérer la flore bactérienne.



Quelques hypothèses simplificatrices sont faites :
- le débit entrant en eau usée est constant (un bassin de rétention en amont de la station permet cela) ;
- le décanteur est parfait : tous les polluants et toutes les bactéries sont recirculés, les concentrations en ces deux espèces c_{P_s} et c_{B_s} dans l'eau rejetée sont nulles, aucune réaction n'a lieu dans le décanteur ;
- le bassin d'aération et le décanteur sont de volumes constants ;
- le débit d'oxygène, noté q_O, injecté dans le bassin est constant.

On note q_e le débit volumique entrant en eaux usées et $c_{P_e}(t)$ la concentration en polluant des eaux usées. Le débit de recirculation est une fraction constante du débit d'entrée donné par $q_r = kq_e$ (avec $0 < k < 1$ constant). Les concentrations en polluant et bactéries dans le bassin sont notées $c_P(t)$ et $c_B(t)$ respectivement. Les concentrations en polluant et bactéries dans le flux de recirculation sont notées $c_{P_r}(t)$ et $c_{B_r}(t)$ respectivement.

(a) En faisant le bilan matière du décanteur, montrer que les concentrations dans le débit de recirculation sont données par :

$$c_{P_r}(t) = \frac{1+k}{k} c_P(t) \qquad \text{et} \qquad c_{B_r}(t) = \frac{1+k}{k} c_B(t)$$

(b) La consommation des polluants par les bactéries, qui de ce fait prolifèrent, peut être représentée par une réaction *Polluant* → *Bactéries* de vitesse

$$v(t) = k_v q_O c_B(t)$$

où k_e est une constante. On suppose également que les bactéries ont une vitesse de mortalité notée M_b. Montrer que les concentrations $c_B(t)$, $c_{P_e}(t)$ et $c_P(t)$ obéissent aux équations suivantes :

$$V\frac{dc_P(t)}{dt} = q_e c_{P_e}(t) - V k_e q_O c_P(t) c_B(t)$$
$$V\frac{dc_B(t)}{dt} = V k_e q_O c_P(t) c_B(t) - V M_b c_B(t)$$

(c) On suppose que $c_{P_e}(t)$, $c_P(t)$ et $c_B(t)$ varient peu autour de leurs valeurs à l'équilibre notées $c_{P_{e0}}$, c_{P0} et c_{B0}. Linéariser le système pour obtenir des équations différentielles **linéaires** entre $\delta c_{P_e}(t)$, $\delta c_P(t)$ et $\delta c_B(t)$ (où $\delta x(t) = x(t) - x_0$).

(d) Montrer qu'on peut écrire (en notant $\Delta X(p) = \mathcal{L}(\delta x(t))$)

$$\Delta C_P(p) = H_1(p)\Delta C_{P_e}(p) - H_2(p)\Delta C_B(p)$$
$$\Delta C_B(p) = H_3(p)\Delta C_P(p)$$

où les fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ sont à définir.

?

(e) Représenter le schéma bloc du système.

(f) Donner la fonction de transfert (en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$) de $\Delta C_{P_e}(p)$ vers $\Delta C_P(p)$ et son gain statique.

(g) Mêmes questions avec le transfert de $\Delta C_{P_e}(p)$ vers $\Delta C_B(p)$.

(h) Que deviennent les équations et le schéma bloc si on considère le débit d'oxygène variable ?

(i) Dans ce type d'installation, le débit d'oxygène est un des rares moyens d'action dont on dispose sur le processus. Le débit d'oxygène est donc la grandeur de commande de la station. On veut rendre la concentration en polluant en sortie du bassin, $c_P(t)$, indépendante de la concentration en polluant en entrée $c_{P_e}(t)$. Quel capteur doit-on prévoir et comment adapter le débit en oxygène ? Faire le schéma-blocs correspondant en détaillant toutes les fonctions de transfert.

(j) Comment adapter le débit d'oxygène si on veut, de plus, réguler la concentration $c_P(t)$ autour d'une référence $c_{P_{ref}}(t)$? Faire le schéma-blocs correspondant.

2. Diagramme de Bode

On considère la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{100p(p+1)}{(10p+1)(100p+1)}$$

(a) Tracer le diagramme de Bode (Gain en dB et phase) de $H(p)$.

(b) Donner la bande passante à $-20\ dB$ (c-à-d l'intervalle de pulsation où le gain est supérieur ou égal à $-20\ dB$) de ce système.

(c) Donner, en régime établi, la réponse précise du système à l'entrée $x(t) = sin(0.01t) + sin(10t)$.

3. Réglage d'un correcteur PI

On considère le système défini par la fonction de transfert suivante : → Voir corr Ex 2 TD

$$H(p) = \frac{2}{(1+p)\left(1 + \frac{p}{50} + \frac{p^2}{2500}\right)}$$

Le cahier des charges pour le système, une fois corrigé, est : erreur statique nulle, dépassement inférieur à 10% et temps de montée minimal.

- Ex 9 P ... pente ±20.

(a) Calculer les racines du dénominateur de $H(p)$. Quelle(s) racine(s) détermine(nt) le comportement du système ?

(b) Quelle est la réponse indicielle du système en boucle ouverte sans correcteur ?
↳ e00 et T..p.

(c) Pourquoi choisir un correcteur PI de fonction de transfert $C(p) = K_p\left(\frac{1+T_ip}{T_ip}\right)$?

(d) Pourquoi est-il inefficace d'utiliser le paramètre T_i du correcteur pour retrouver les propriétés d'un avance de phase défini par $\left(\frac{1+T_ip}{1+p}\right)$?

(e) Comment fixer T_i pour supprimer l'influence du mode lent du système ?

(f) Déterminer les paramètres T_i et K_p du correcteur répondant au CdC.